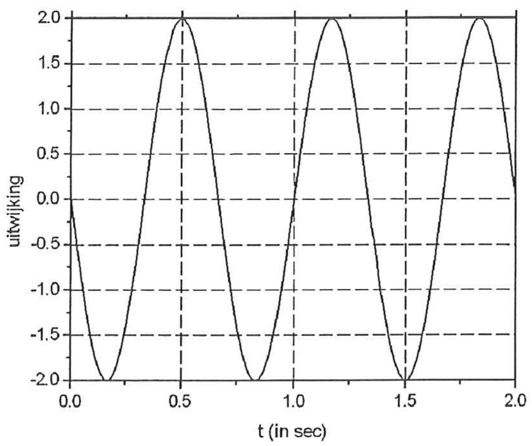
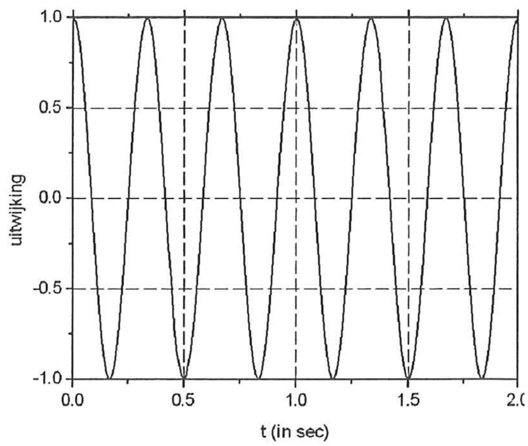
Tentamen Signalen & Systemen

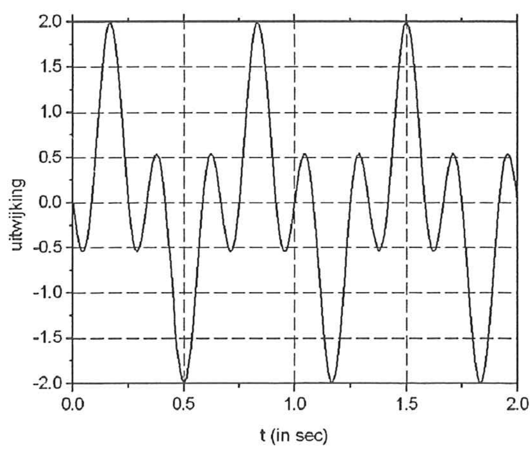
7 april 2011, 9:00-12:00 uur

- Lees eerst een opgave volledig door alvorens deze te maken. Schrijf netjes en zorgvuldig.
- Bij dit tentamen is een formuleblad beschikbaar. Als je gebruik maakt van een formule van dit blad, vermeld dan het nummer van de formule. Andere literatuur, zoals het boek, mag niet geraadpleegd worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Voor antwoorden zonder toelichting (zelfs als het antwoord juist is) worden geen punten toegekend.
- Het tentamen bestaat uit 4 opgaven. De opgaven 1, 3 en 4 zijn 2 punten waard, opgave 3 is 3 punten waard en je krijgt 1 punt cadeau.

Opgave 1: signalen en spectra
In de onderstaande figuren zijn 3 continue signalen (uitwijking als functie van de tijd) weergegeven.







(a) Geef voor ieder signaal een formule voor de uitwijking als functie van de tijd.
(b) Gegeven zijn de continue signalen $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= 4\sin(\pi 10t) \\ y(t) &= \cos(\pi 4t + \pi/4) \\ z(t) &= x(t)y(t) \end{aligned}$$

Schrijf ieder van deze signalen als een **som** van complexe e-machten.
(c) Teken van ieder signaal het spectrum. Geef waarden langs de assen en geef voor de frequentiecomponenten aan wat de fase is.
(d) Gegeven is het signaal $x(t) = \cos(1600\pi \sin(4\pi t))$. Leg uit wat je hoort als je dit signaal zou afspelen. Hoe heet dit type signaal?

Opgave 2: LTI-systemen
(a) Wat bedoelen we als we zeggen dat een systeem LTI (Lineair en Tijdsinvariant)is?

(b) Wat bedoelen we als we zeggen dat een systeem causaal is?

Gegeven is het discrete signaal $x[n] = 2\delta[n] + 7\delta[n-2] + \delta[n-3] + 8\delta[n-4]$.
Het FIR-systeem F_0 wordt gegeven door de unit impulse respons

$$h_0[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4].$$

(c) Wat is de uitvoer van het systeem F_0 als we op de invoer $x[n]$ plaatsen?

(d) We analyseren een onbekend FIR systeem door het het bovenstaande signaal $x[n]$ aan te bieden. Het systeem geeft als uitvoer $y[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 13\delta[n-2] + 15\delta[n-3] + 31\delta[n-4] + 19\delta[n-5] + 24\delta[n-6]$. Wat is de impulse response van dit systeem?

(e) We hebben de beschikking over een (onbeperkte) voorraad van vier signaalbewerkingscomponenten. Deze componenten hebben de volgende impulserepsonses:

- $c_0[n] = \delta[n-1]$
- $c_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$
- $c_2[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$
- $c_3[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$

Is het mogelijk om het FIR-systeem F_0 te bouwen met behulp van een serieschakeling van bovenstaande componenten? Zo ja, hoe? Zo nee, waarom niet? [Opmerking: een component mag vaker dan één keer gebruikt worden. Tevens hoeven niet alle componenten gebruikt te worden.]

(f) Een ander FIR systeem F_2 wordt gegeven door de de unit impulse respons

$$h_1[n] = 4\delta[n] - 2\delta[n-1] - 4\delta[n-3] + 2\delta[n-4].$$

Beantwoord voor dit systeem de vraag uit onderdeel (e).

Opgave 3: Fourier analyse

(a) Bepaal de Fourier-coëfficienten van het signaal $z(t) = 6 + 4\cos(2\pi 21t) + 10\sin(2\pi 49t)$.

Gegeven is een periodiek signaal $s(t)$ met periode T_0. Het tijdsinterval $[0, T_0]$ is opgesplitst in de vijf intervallen $[0, aT_0]$, $[aT_0, bT_0]$, …, $[dT_0, 1]$, waarbij $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$.

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq t < aT_0 \\ 1 & \text{voor } aT_0 \leq t < bT_0 \\ 0 & \text{voor } bT_0 \leq t < cT_0 \\ -1 & \text{voor } cT_0 \leq t < dT_0 \\ 0 & \text{voor } dT_0 \leq t < T_0 \end{cases}$$

(b) Laat zien dat de Fourier-coëfficienten a_k van het signaal $s(t)$ gegeven worden door

$$a_k = \begin{cases} b + c - a - d & \text{voor } k = 0 \\ \frac{-1}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi kb} - e^{-j2\pi ka} + e^{-j2\pi kc} - e^{-j2\pi kd}\right) & \text{voor } k \neq 0 \end{cases}$$

(c) De blokgolf $x(t)$ (met periode 6 seconden) wordt gegeven door:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 \leq t < 3 \\ -1 & \text{voor } 3 \leq t < 6 \end{cases}$$

Laat zien dat de Fourier-coëfficienten a_k van het signaal $x(t)$ gegeven worden door

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{voor } k = 0 \\ 0 & \text{voor } k \text{ even} \\ \frac{2}{j\pi k} & \text{voor } k \text{ oneven} \end{cases}$$

(d) Het periodieke signaal $y(t)$ (met periode 6 seconden) wordt gegeven door:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{voor } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{voor } 2 \leq t < 3 \\ -1 & \text{voor } 3 \leq t < 4 \\ -2 & \text{voor } 4 \leq t < 5 \\ -1 & \text{voor } 5 \leq t < 6 \end{cases}$$

Bepaal de Fourier-coëfficienten a_k van het signaal $y(t)$.

Opgave 4: z-transformaties

Een FIR-systeem wordt gegeven door de differentie-vergelijking

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + 2x[n-2] + 2x[n-3] + x[n-4].$$

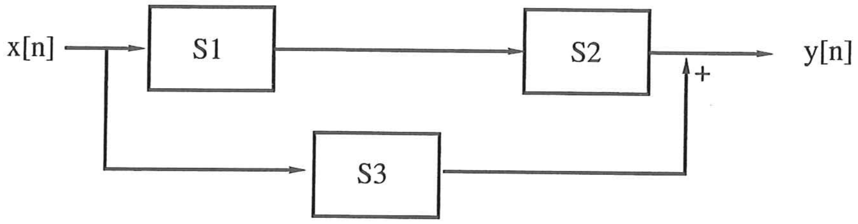
(a) Bepaal de systeemfunctie $H(z)$ van dit systeem en de frequentierespons van dit systeem.

(b) Bepaal de nulpunten van de systeemfunctie. Wat is het belang van deze nulpunten?

(c) We bieden dit systeem de invoer $x[n] = 1 + \cos(\pi n) + 2\cos(\pi n/2)$ aan. Wat is de uitvoer?

(d) Construeer de systeemfunctie van een FIR-filter dat de frequenties $\hat{\omega}_0 = \frac{\pi}{3}$ en $\hat{\omega}_0 = \frac{\pi}{4}$ volledig verwijderd (uiteraard wordt de triviale oplossing $H(z) = 0$ niet gevraagd). Wat is de differentie-vergelijking van dit systeem?

De onderstaande figuur toont de samenstelling van drie LTI systemen S_1, S_2 en S_3.



Het systeem S_1 wordt gegeven door de differentie-vergelijking $y[n] = x[n] + x[n-1]$. Het systeem S_2 wordt gegeven door de systeemfunctie $H(z) = 1 + z^{-1}$. Het systeem S_3 heeft de frequentierespons $H(e^{j\hat{\omega}}) = 2e^{-j3\hat{\omega}}$.

Maak de onderstaande vragen (e)-(g). Kies zelf een handige volgorde.

(e) Wat is de differentievergelijking voor het totale (samengestelde) systeem?
(f) Wat is de impulsrespons van het totale (samengestelde) systeem?
(g) Wat is de systeemfunctie van het totale (samengestelde) systeem?

Formuleblad Systemen en Signalen

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \sin(\theta + \pi/2) && (1)\\
\cos(\theta) &= \cos(\theta + 2\pi k) \text{ voor gehele } k && (2)\\
\cos(\theta) &= \cos(-\theta) && (3)\\
\sin(-\theta) &= -\sin(\theta) && (4)\\
\cos(2\pi k) &= 1 \text{ voor gehele } k && (5)\\
\cos(\pi k + \frac{\pi}{2}) &= 0 \text{ voor gehele } k && (6)\\
\cos(2\pi k + \pi) &= -1 \text{ voor gehele } k && (7)\\
j^2 &= -1 && (8)\\
Re(a + jb) &= a && (9)\\
Im(a + jb) &= b && (10)\\
(a + jb)^* &= a - jb && (11)\\
e^{j\theta} &= \cos(\theta) + j\sin(\theta) && (12)\\
\cos(\theta) &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} && (13)\\
\sin(\theta) &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} && (14)\\
\int e^{\alpha t} dt &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + c && (15)\\
\int t e^{\alpha t} dt &= \frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} e^{\alpha t} + c && (16)\\
x[n] &= x(nT_s) \text{ Perfect A-to-D conversion} && (17)\\
f_s &= \frac{1}{T_s} \text{ Sampling frequency} && (18)\\
\hat{\omega} &= \omega T_s = \frac{\omega}{f_s} \text{ Normalized Radian Frequency} && (19)\\
y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] p(t - nT_s) \text{ Interpolation/Reconstruction} && (20)\\
p(t) &= \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}, \quad -\infty < t < \infty \text{ Sinc pulse} && (21)\\
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \text{ Fourier synthesis} && (22)\\
a_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j(2\pi/T_0)kt}\, dt \text{ Fourier analysis} && (23)\\
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \text{ DFT (Discrete Fourier Transform)} && (24)
\end{aligned}
$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn} \text{ Inverse DFT} \tag{25}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \text{ FIR system} \tag{26}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \text{ Unit impulse response} \tag{27}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \text{ Convolution sum FIR-system} \tag{28}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \text{ General convolution} \tag{29}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k} = \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\hat{\omega}k} \text{ Frequency response FIR-system} \tag{30}$$

$$h_1[n] * h_2[n] \leftrightarrow H_1(e^{j\hat{\omega}})H_2(e^{j\hat{\omega}}) \tag{31}$$

$$D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L\sin(\hat{\omega}/2)} \text{ Dirichlet function} \tag{32}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N} x[k]z^{-k} \text{ Z-transform} \tag{33}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N} h[k]z^{-k} \text{ System function FIR system} \tag{34}$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \text{ Linearity of z-transform} \tag{35}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z) \text{ Convolution via z-domain} \tag{36}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{37}$$